Génie mécanique

Partie II: Cours No 5.1
Elasticité linéaire

V.Michaud

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Rappel contenu du cours

Introduction, les matériaux
Partie I: De l'atome à la structure des matériaux (11/09-2/10)

- Structure atomique, tableau périodique,
- Liaisons chimiques, Structure des matériaux

Partie II: Propriétés mécaniques (7/10-4/11)

- Elasticité linéaire/plasticité,
- Ductilité et dureté,
- Ténacité,
- Fatigue et usure, étude de cas

Partie III: Phénomènes thermodynamiques, concepts du rôle de la chaleur, du temps, des équilibres (6/11-9/12)

- Dans les corps purs, dans les mélanges réactifs (réactions chimiques) Réactions chimiques: acide base /oxydo-réduction, piles et electrolyse
- Dans les mélanges non réactifs (alliages, diagrammes de phase)

Partie IV: Propriétés fonctionnelles des matériaux (11-18/12)
Propriétés thermiques/ Comportement à haute température,
Propriétés électriques, magnétiques.

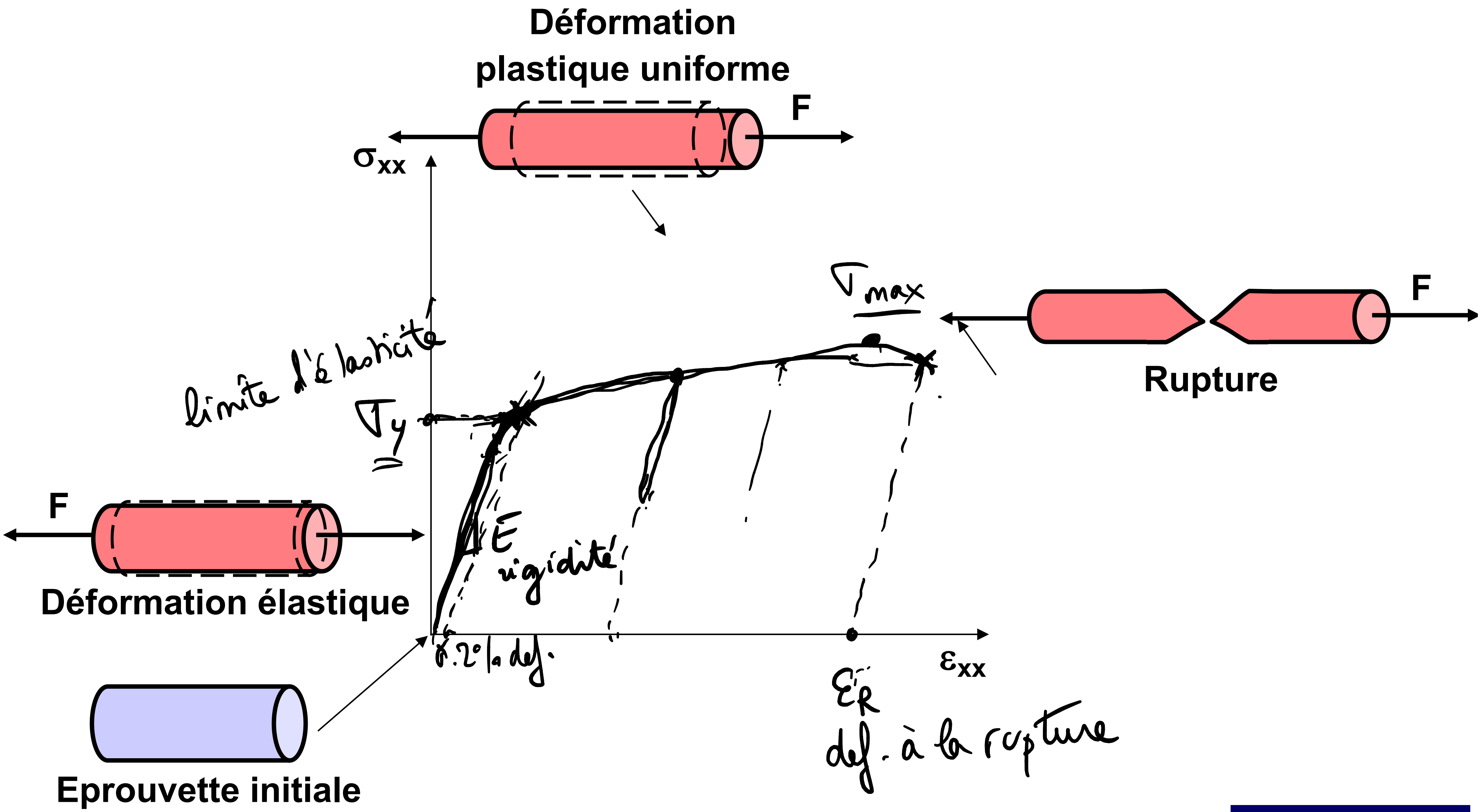
Table des matières

- D'où vient l'élasticité des matériaux?
- Contraintes et déformations
- Exemples de propriétés élastiques des matériaux

Objectifs du cours

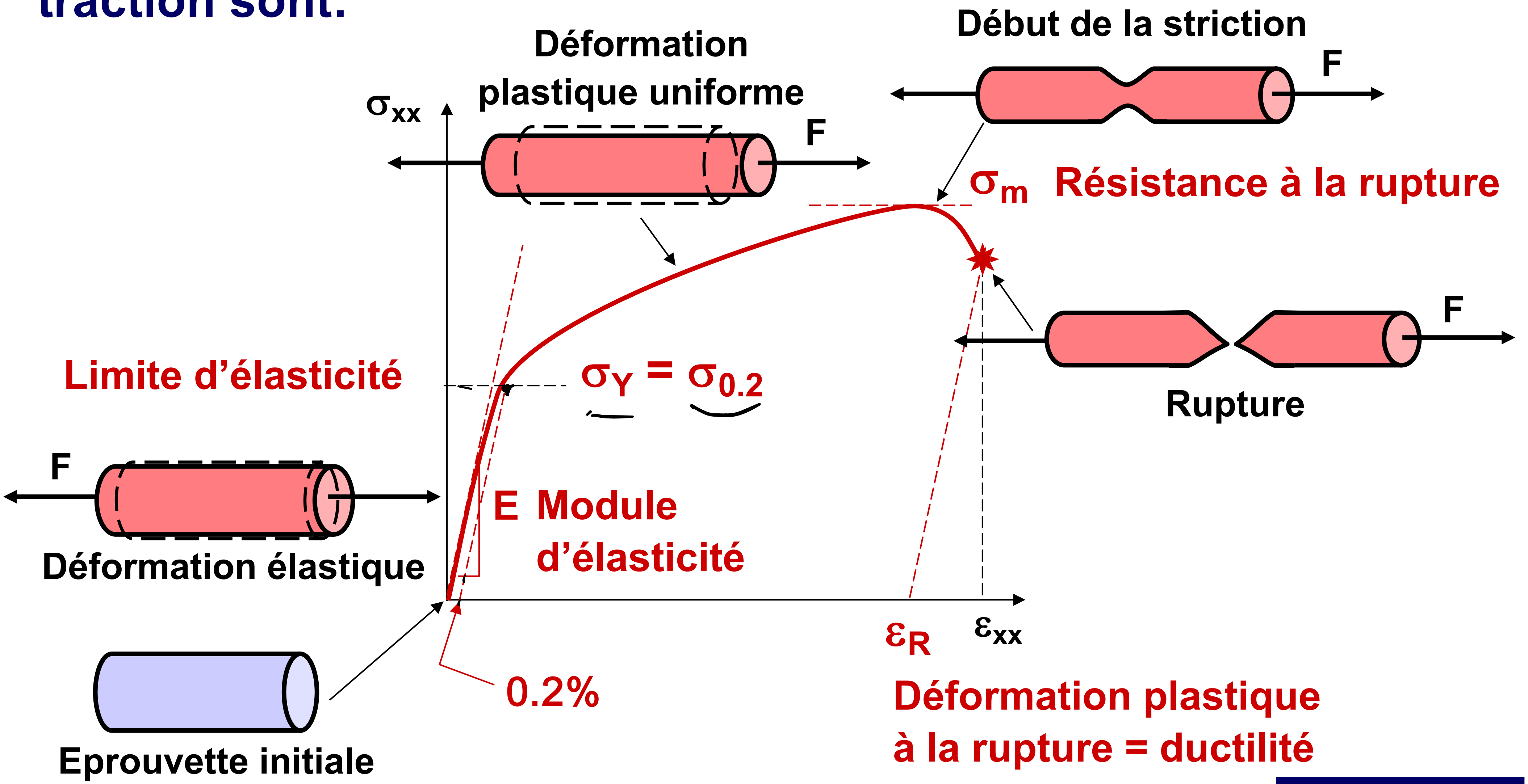
- Voir un test de traction
- Découvrir les propriétés d'élasticité linéaire des matériaux et comprendre d'où elles proviennent.
- Apprendre les cas de chargement en traction/compression.

Test de traction d'un métal

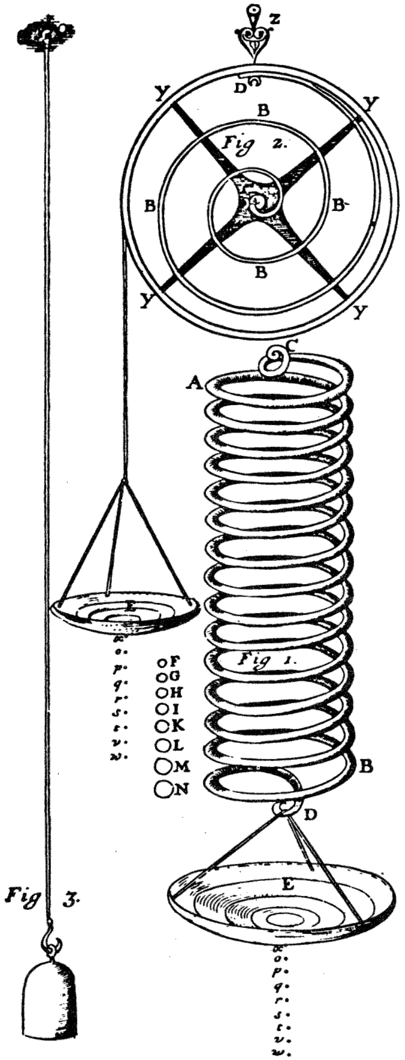


Test de traction d'un métal

Pour un métal typique, les étapes de la déformation en traction sont:



Propriétés élastiques des matériaux



Par Robert Hooke — De potentia restitutiva, Domaine public,
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=13816354

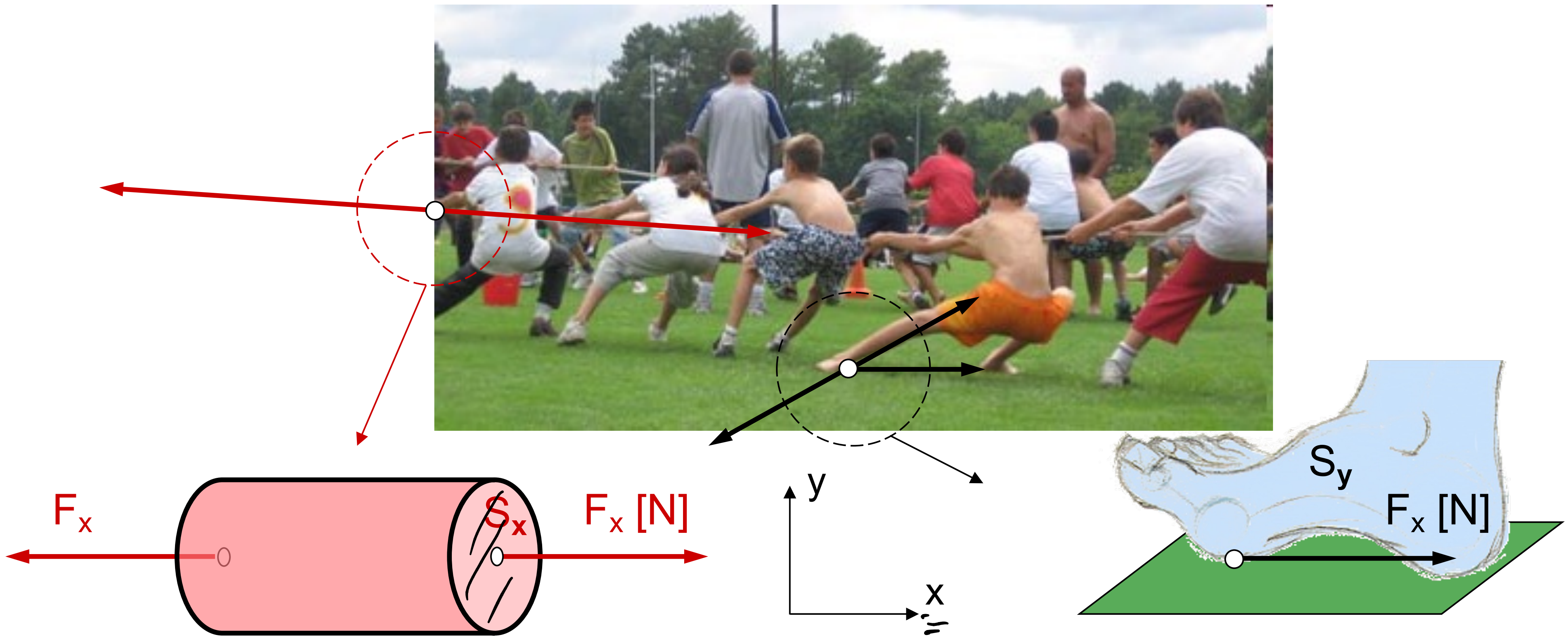
La connaissance de la structure interne de la matière, et du type de liaisons entre les atomes permet d'estimer la rigidité des matériaux…voir fin de ce cours.

Historiquement, on a procédé bien sur de manière inverse…On a un matériau, on effectue un essai de traction et on enregistre la force qu'il faut appliquer pour imposer une déformation donnée…

Loi de Hooke (1660): l'allongement est proportionnel à la force.

Définition de: Contraintes

unités N/m^2 = Pa (Pascal)



Contrainte en traction: $\sigma_{xx} = \dfrac{F_x\,[N]}{S_x\,[m^2]}$

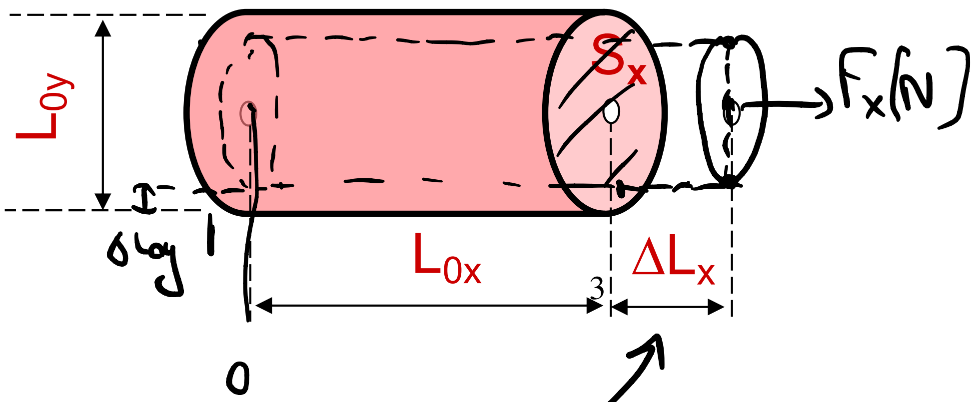
Contrainte en cisaillement: $\sigma_{xy} = \tau_{xy} = \dfrac{F_x\,[N]}{S_y\,[m^2]}$

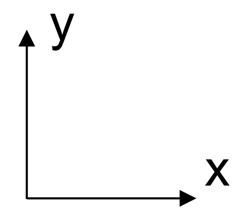
sigma ↗   to ↗

Définition de :Déformations

Lorsqu'un corps est soumis à des forces (**contraintes**) externes, il se **déforme**.

en traction





En traction:

Sans dimension !

Allongement de ΔL_x [en m]

déformation (strain) $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\Delta L_x}{L_{0x}}$ $\dfrac{[m]}{[m]}$ → sans unité !

↑ epsilon

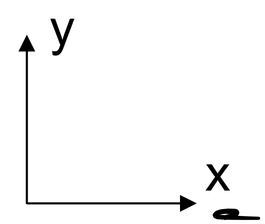
$\varepsilon_{yy} = \dfrac{\Delta L_y}{L_{0y}}$.

déformation sur l'axe y

Déformations

Lorsqu'un corps est soumis à des forces (**contraintes**) externes, il se **déforme**.

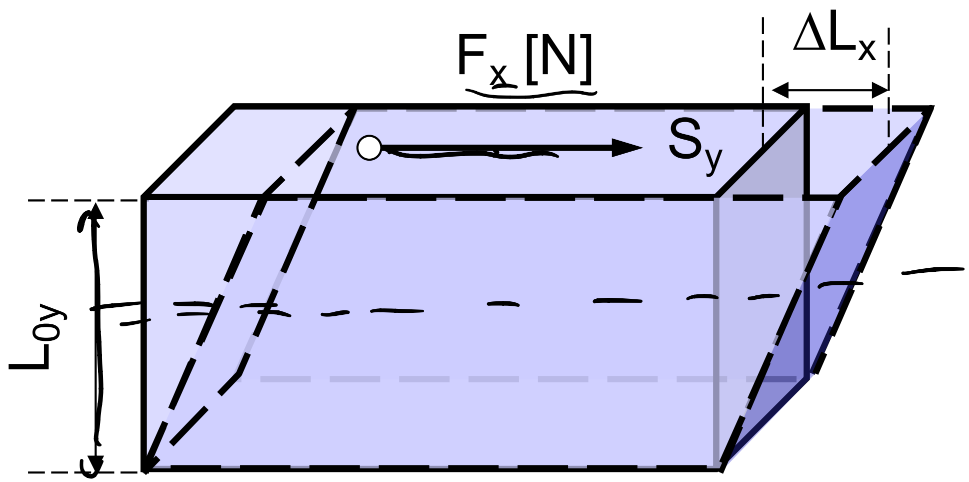
En cisaillement **Sans dimension !**



$$\underline{\varepsilon_{xy}} = \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\frac{\Delta L_x}{L_{0y}}$$

gamma

$$\underline{\gamma} = \frac{\Delta L_x}{L_{0y}}$$

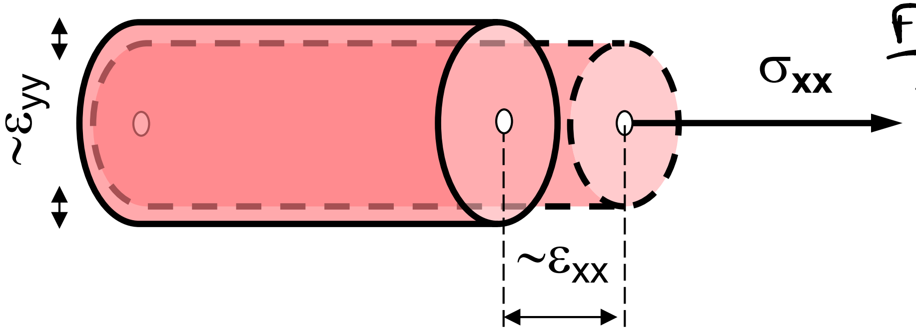


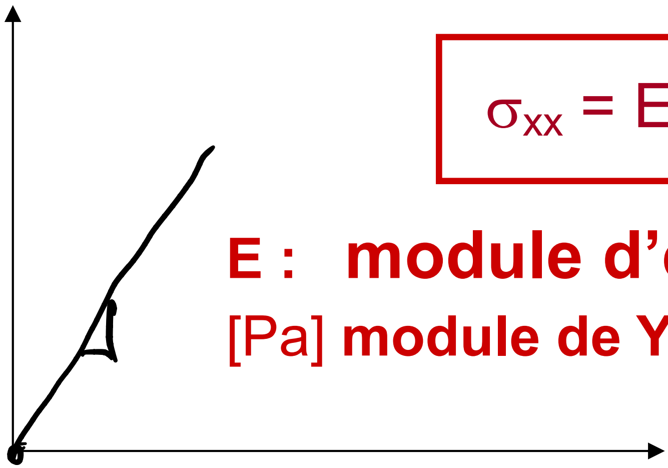
(Facteur ½ par convention pour des raisons que vous verrez plus tard, Physique 3, et γ déformation en cisaillement)

Traction /compression uniaxiale

Dans une gamme de déformation dite **élastique**, un corps soumis à une charge normale se déforme mais revient à sa position originale une fois déchargé (**déformation réversible**).

Si la relation entre contrainte et déformation est linéaire, on parle de déformation élastique linéaire.





$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{S_x}$

$$\boxed{\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}}$$

E : module d'élasticité

[Pa] **module de Young**

$\sigma_{xx}=F_x/S_x$

$E = \frac{k\, l_0}{S_x}$

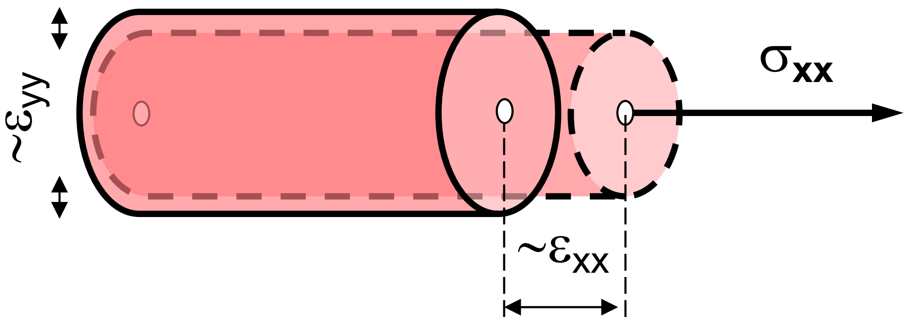
$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L_x}{L_{0x}}$

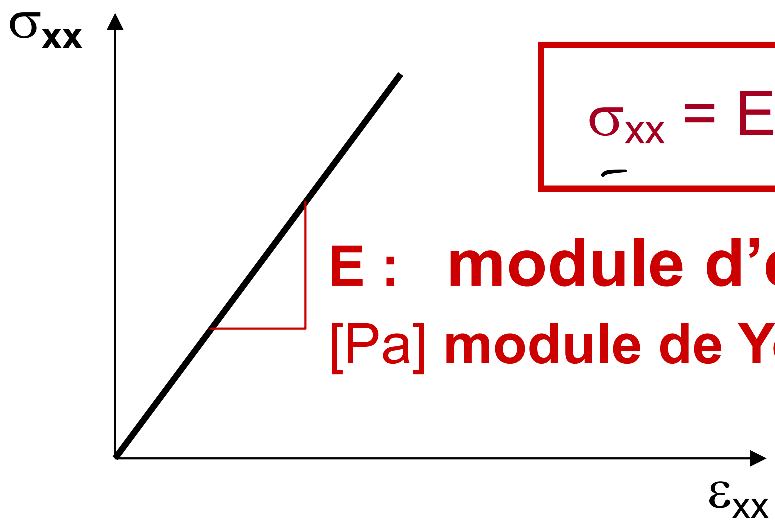
On observe $F_x=k\ \Delta l$

$\Delta l_x = L_{0x}\,\varepsilon_{xx}$

Alors $\sigma_{xx}=k\ \Delta l/S_x=kl_0/S_x.\Delta l/l_0=E\ \varepsilon_{xx}$

Cas de chargement: Traction/compression uniaxiale





$\boxed{\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}}$

E : module d'élasticité

[Pa] **module de Young**

$\boxed{\varepsilon_{yy} = -\nu\varepsilon_{xx}}$

il y a 1 relation entre ε_{yy} et ε_{xx} !

sous la contrainte σ_{xx}

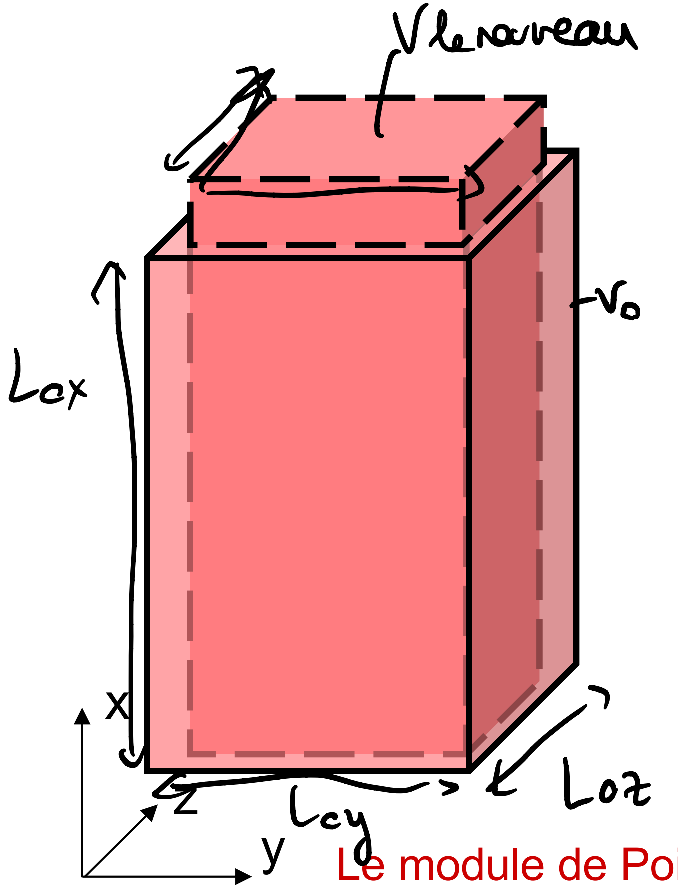
$\varepsilon_{yy} = -\nu\, \varepsilon_{xx}$

ν : **le coefficient de Poisson** mesure la contraction latérale lors d'une déformation uniaxiale

nu

Traction/compression uniaxiale

Lors d'une déformation uniaxiale (ou autre), le matériau subit un **changement de volume** donné par:



$$V_0 = L_{0x} L_{0y} L_{0z}$$

$$V = (L_{0x}+\Delta L_{0x})(L_{0y}+\Delta L_{0y})(L_{0z}+\Delta L_{0z})$$

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{L_{0x}+\Delta L_{0x}}{L_{0x}}\right)\left(\frac{L_{0y}+\Delta L_{0y}}{L_{0y}}\right)\left(\frac{L_{0z}+\Delta L_{0z}}{L_{0z}}\right)$$

$$= (1+\varepsilon_{xx})(1+\varepsilon_{yy})(1+\varepsilon_{zz})$$

$$= 1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} + \cancel{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}} + \cancel{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}} \text{ etc...}$$

négligé car petit

$$= 1 + \varepsilon_{xx} - \nu\varepsilon_{xx} - \nu\varepsilon_{xx}$$

$$= 1 + (1-2\nu)\varepsilon_{xx}$$

Le module de Poisson est donc ≤ 0.5.

Le caoutchouc, avec $\nu \cong 0.5$ se déforme élastiquement presque sans changement de volume.

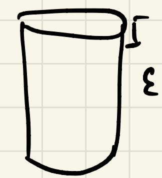
$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{V}{V_0} - 1 = (1-2\nu)\varepsilon_{xx}$$

ν entre 0 et 0,5

souvent $\nu \sim 0.2 - 0.3$

Caoutchouc $\nu = 0.5 \rightarrow \dfrac{\Delta V}{V_0} = (1-2\nu)\varepsilon_{xx} = 0$

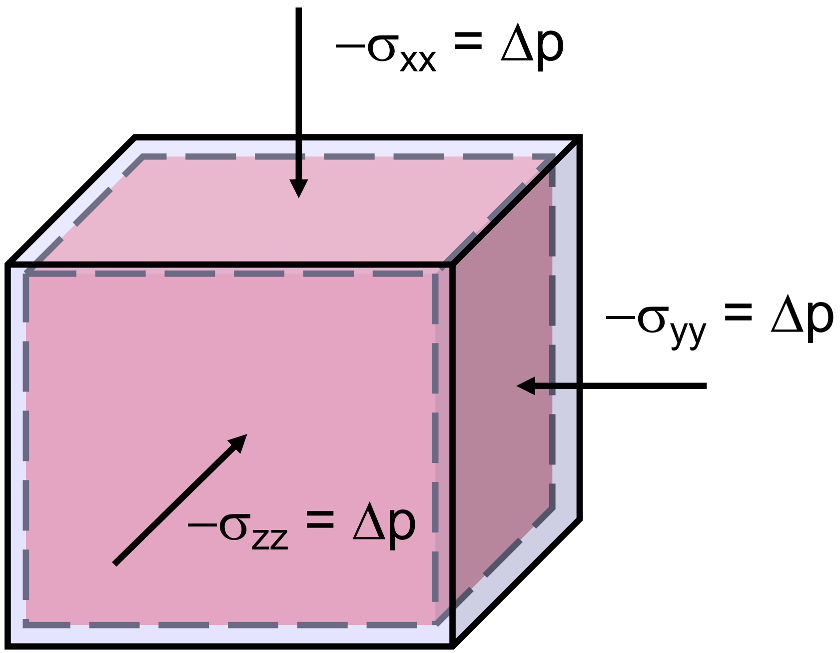
<u>liège</u> si $\nu = 0$ $\quad \dfrac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_{xx} \rightarrow$ grand

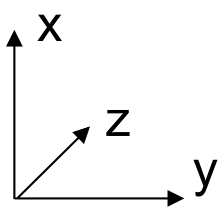


$\varepsilon_{yy} = 0$

Compression hydrostatique

Une **compression hydrostatique** correspond à une **contrainte normale constante** (négative) sur toute la surface du solide.





On définit le **coefficient de compressibilité** K comme:

$$\boxed{K = -V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V} \quad [\text{Pa}]}$$

Pour un solide isotrope, on peut montrer que

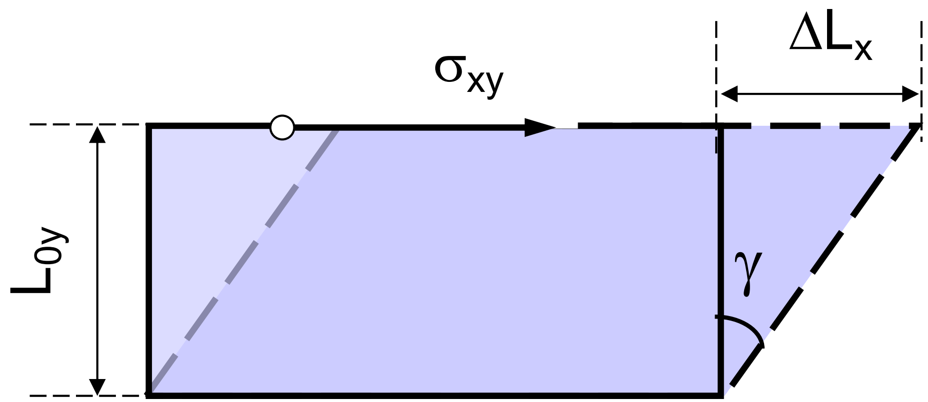
(voir le calcul dans la dernière planche du cours):

$$\boxed{K = \frac{1}{3}\frac{E}{1-2\nu}}$$

Cas de chargement: Cisaillement simple

Un corps soumis à un cisaillement simple élastique permet de définir un **module de cisaillement G**.

$$\sigma_{xy} = G\,2\varepsilon_{xy} = G\gamma = G\frac{\Delta \mathbf{L_x}}{\mathbf{L_{0y}}}$$

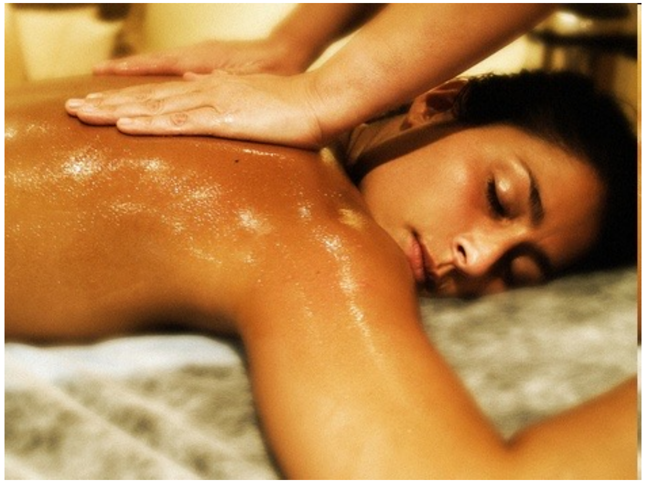


Cas de chargement: Cisaillement simple

Ces procédés sont-ils du cisaillement? Elastique?

Application de vernis

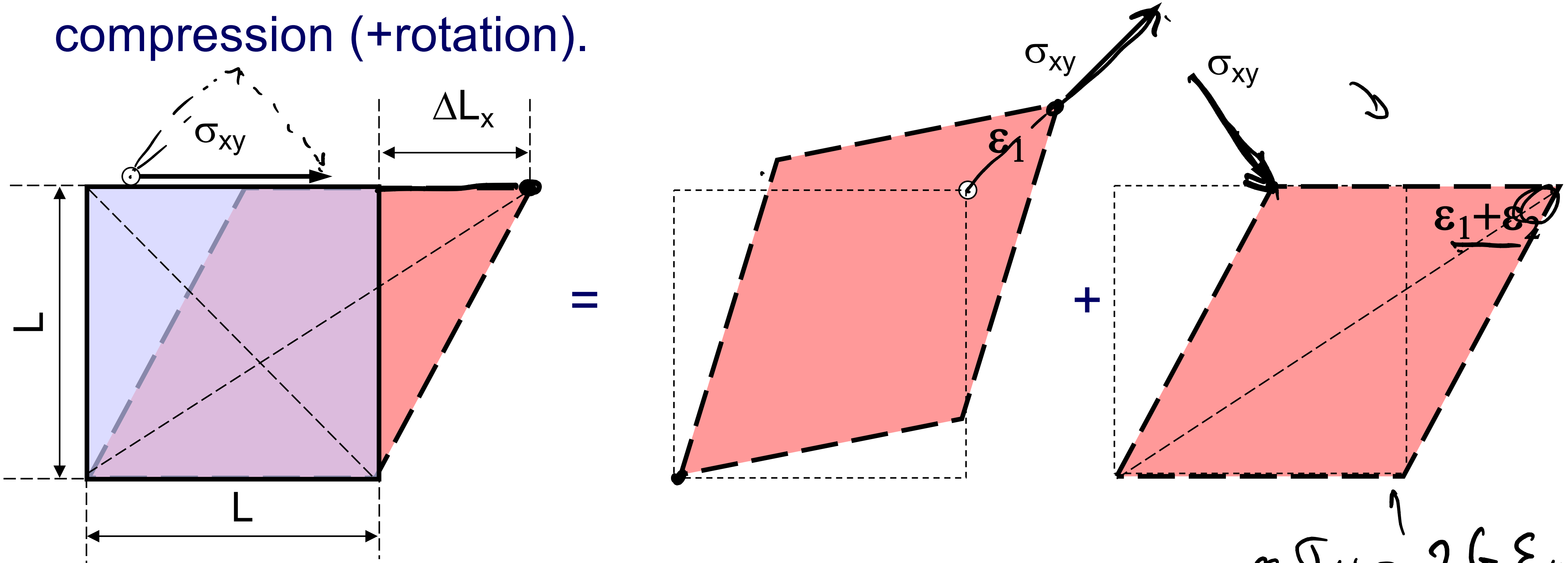
Freinage



Massage

Relation entre E, ν et G

Pour un solide **isotrope**, E, ν et G ne sont pas indépendants. Une contrainte de cisaillement peut être décomposée en une traction + compression (+rotation).



$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\sigma_{xy}}{E} + \nu \frac{\sigma_{yy}}{E} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}$$

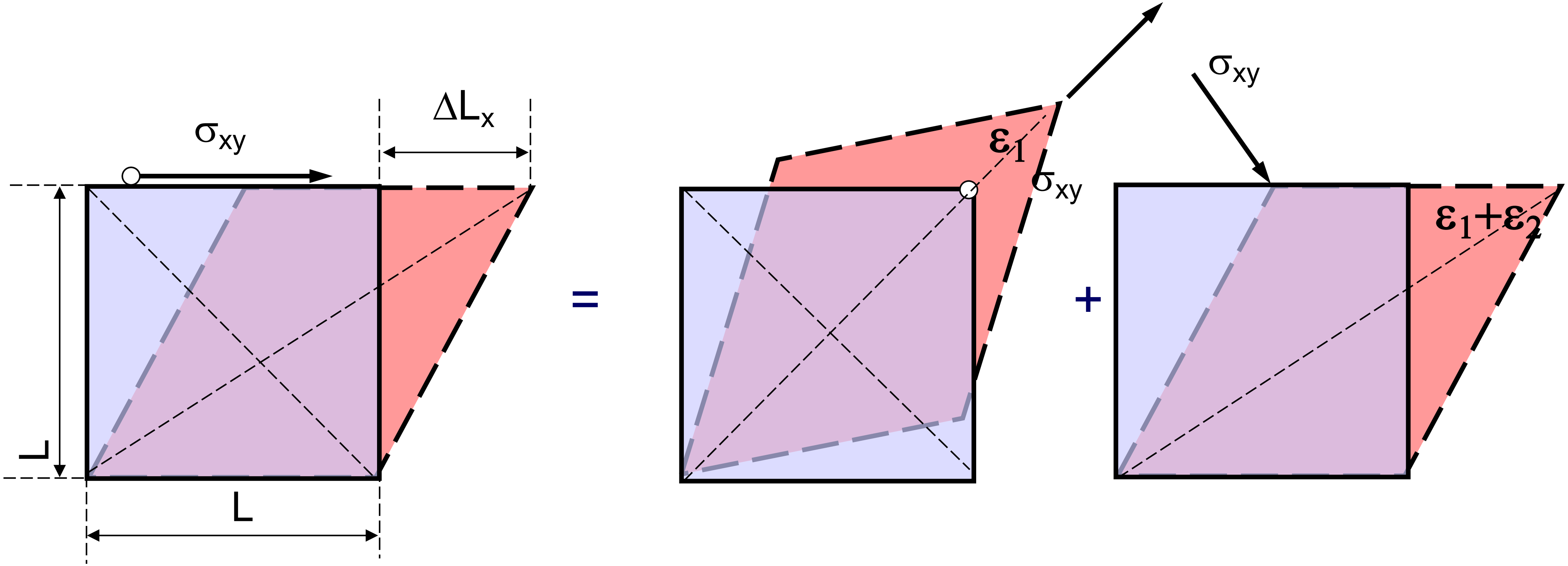
compression

or $\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$

$$\sigma_{xy} = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{E}{1+\nu}}\, 2\varepsilon_{xy}$$

$$\boxed{G = \frac{1}{2}\frac{E}{(1+\nu)}}$$

Relation entre E, ν et G



Anisotropie des propriétés élastiques

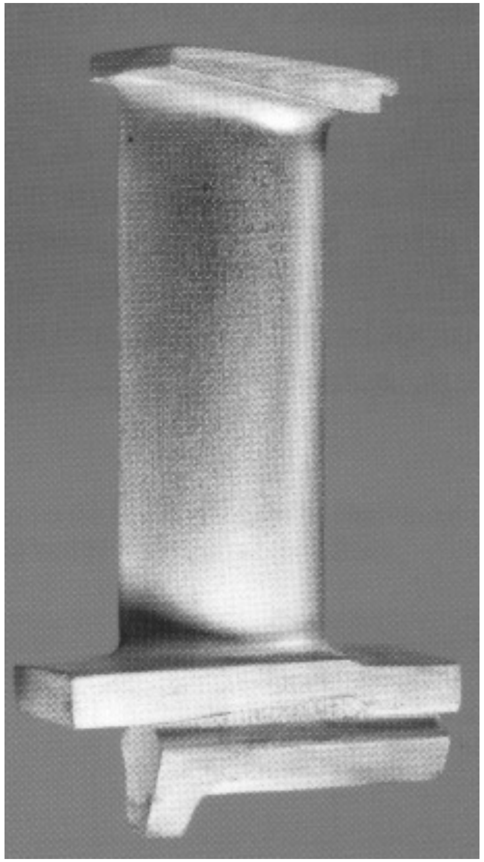
Les coefficients (E, ν, G) peuvent dépendre de l'orientation et sont donc **anisotropes** (ex. monocristal). Un échantillon polycristallin présente des **propriétés isotropes**.

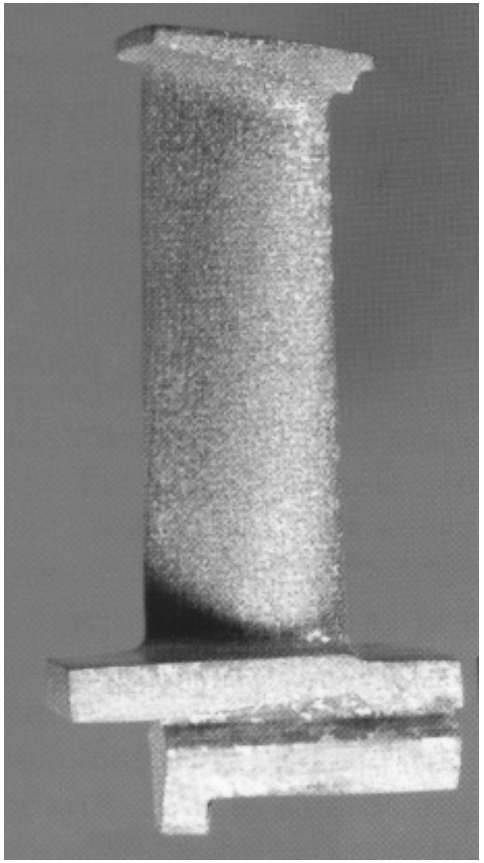
$E_{[100]}$

$E_{[110]}$

$E_{[100]} \neq E_{[110]}$

Aube de turbine monocristalline





E le même ds toutes les directi

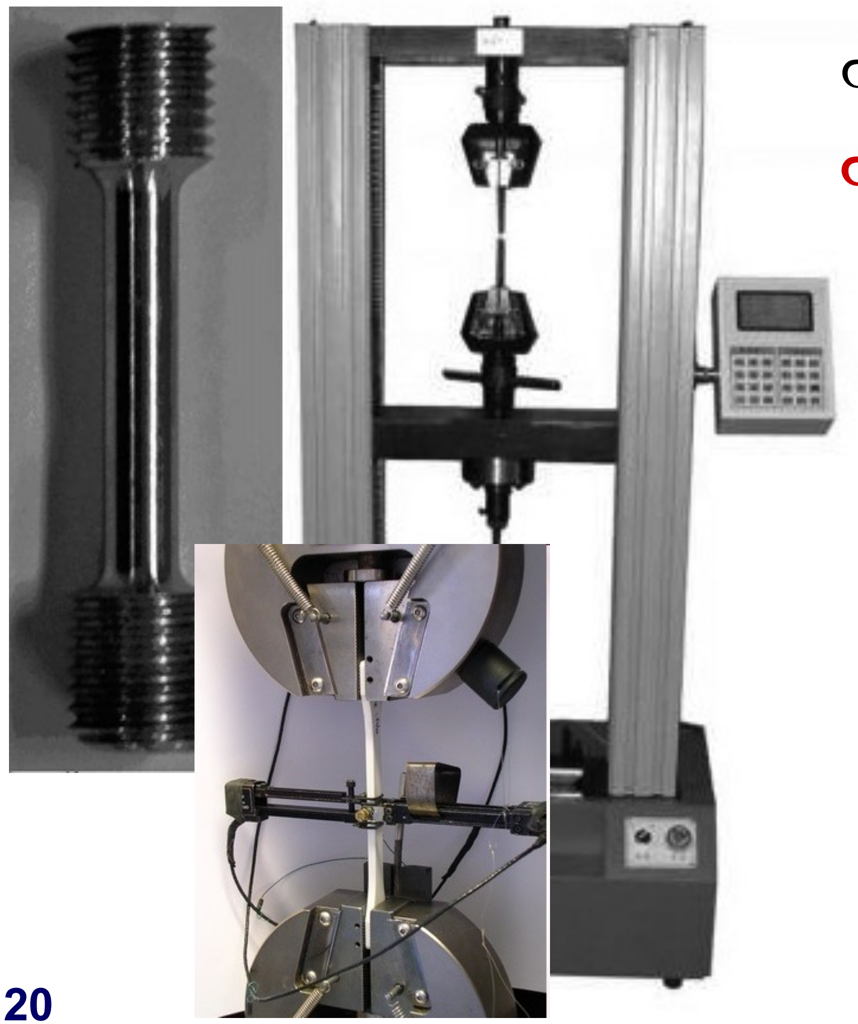
E(n)

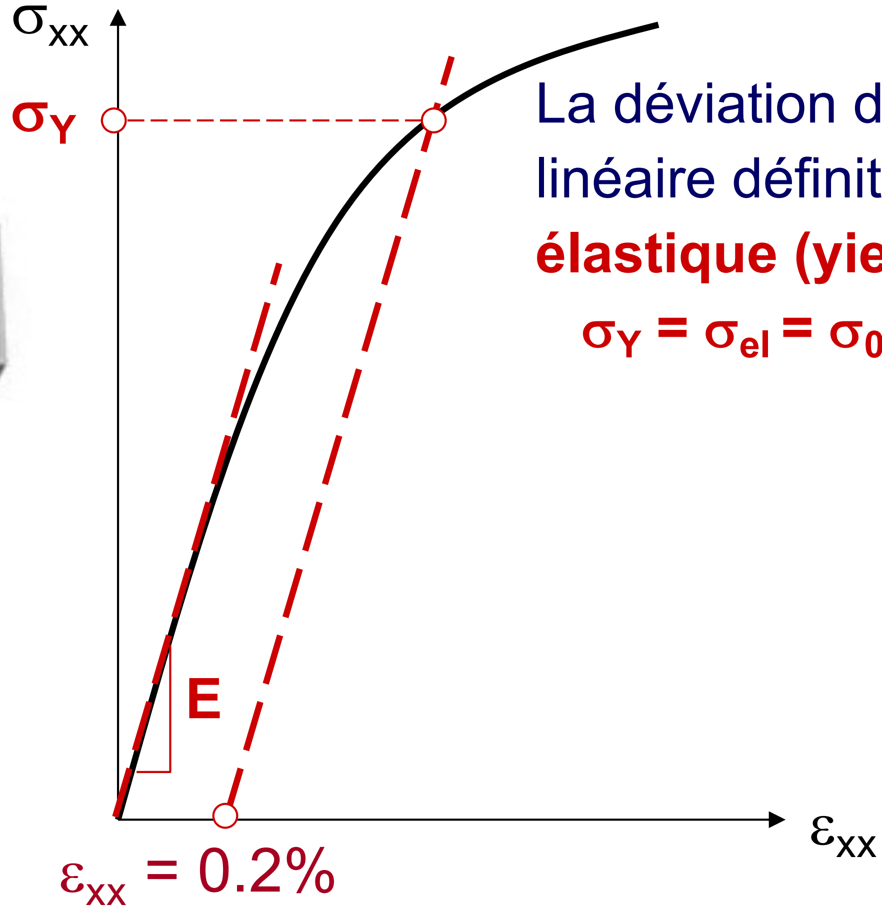
$E(n) = E \quad \forall\, n$

Aube de turbine polycristalline

Méthodes de mesure

La mesure du module élastique et du coefficient de Poisson se fait généralement sur une **éprouvette de traction**. On impose un mouvement et on mesure force/allongement par des capteurs.

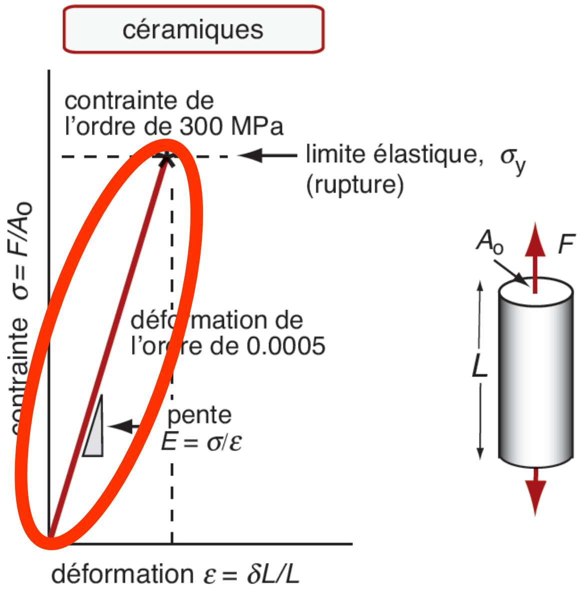


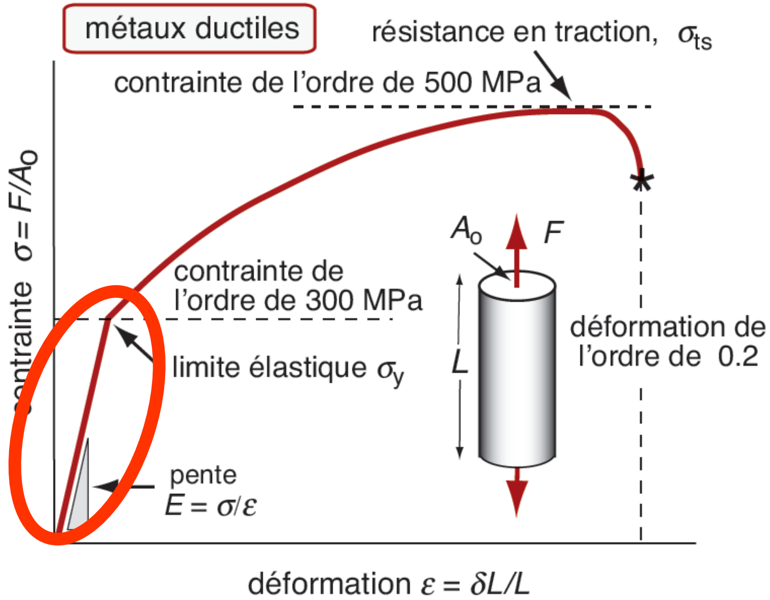


La déviation du comportement linéaire définit **une limite élastique (yield strength)**

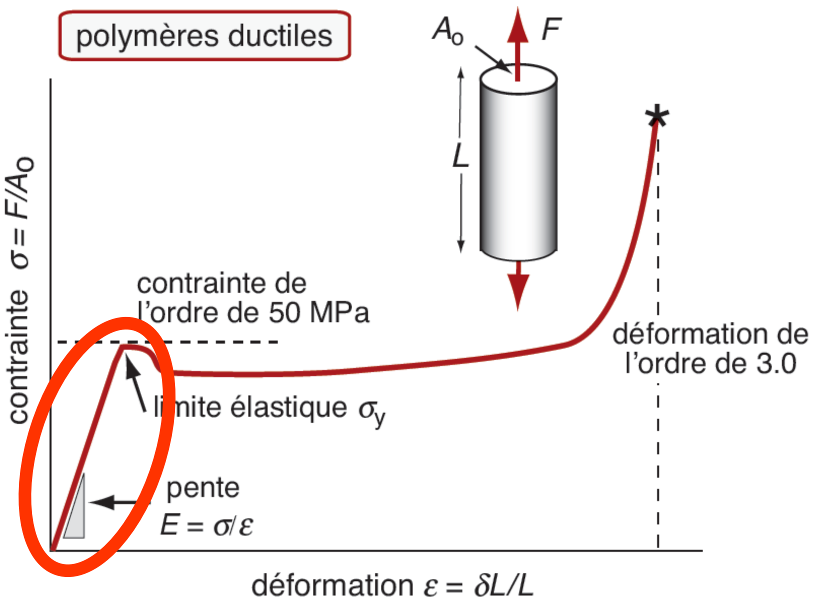
$$\sigma_Y = \sigma_{el} = \sigma_{0.2\%}$$

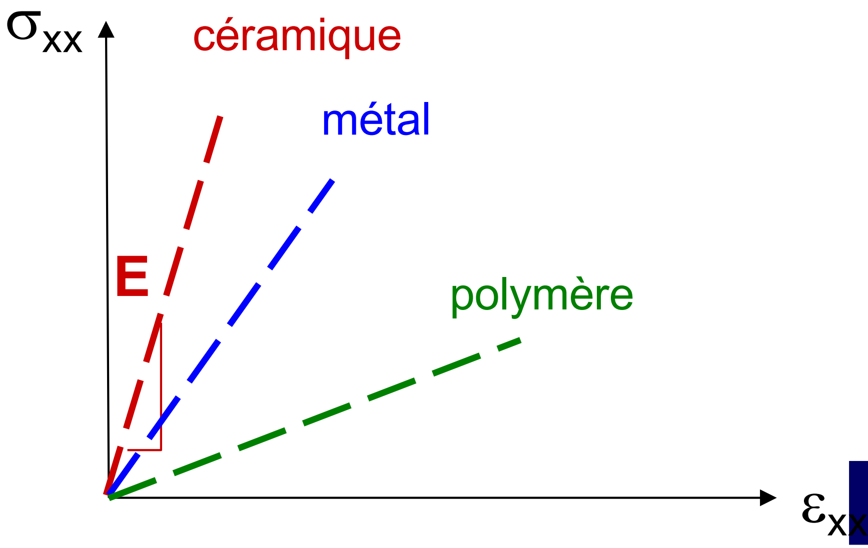
Exemples de comportements





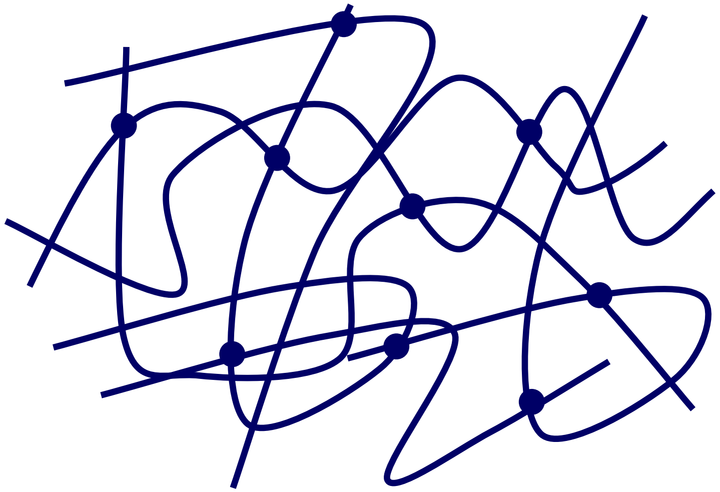
Repris de M. Ashby et al



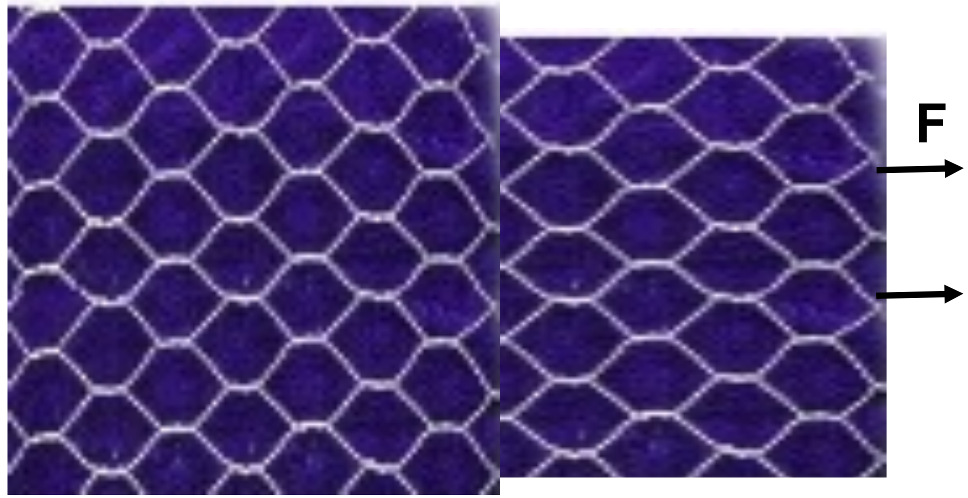


Elastomères

Pour un élastomère, la déformation élastique a lieu grâce aux ponts entre les molécules, un peu comme un treillis.



F = 0

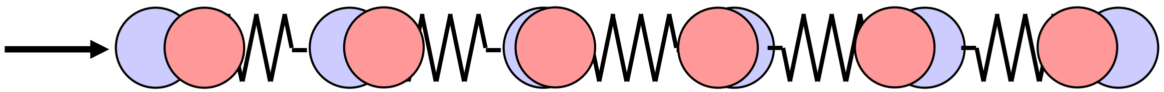


La déformation élastique peut atteindre 1000%. Au-delà d'une limite, tous les ligaments entre ponts sont étirés et le matériau se durcit.

Autre méthode de mesure

La propagation des **ondes acoustiques** dans un matériau est aussi un moyen de mesurer ses propriétés élastiques.

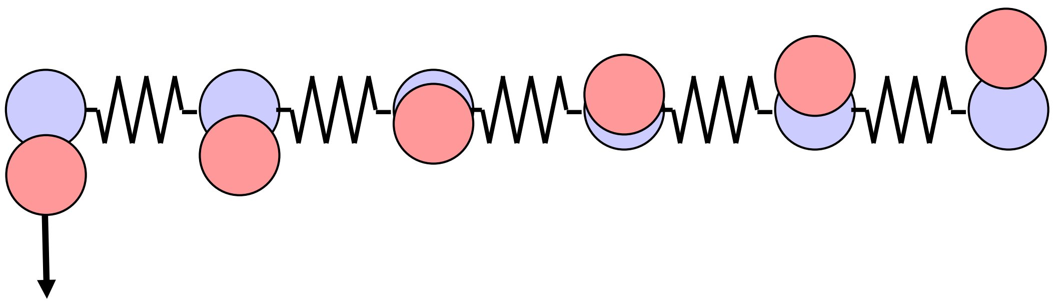
Ondes **longitudinales** (traction-compression)

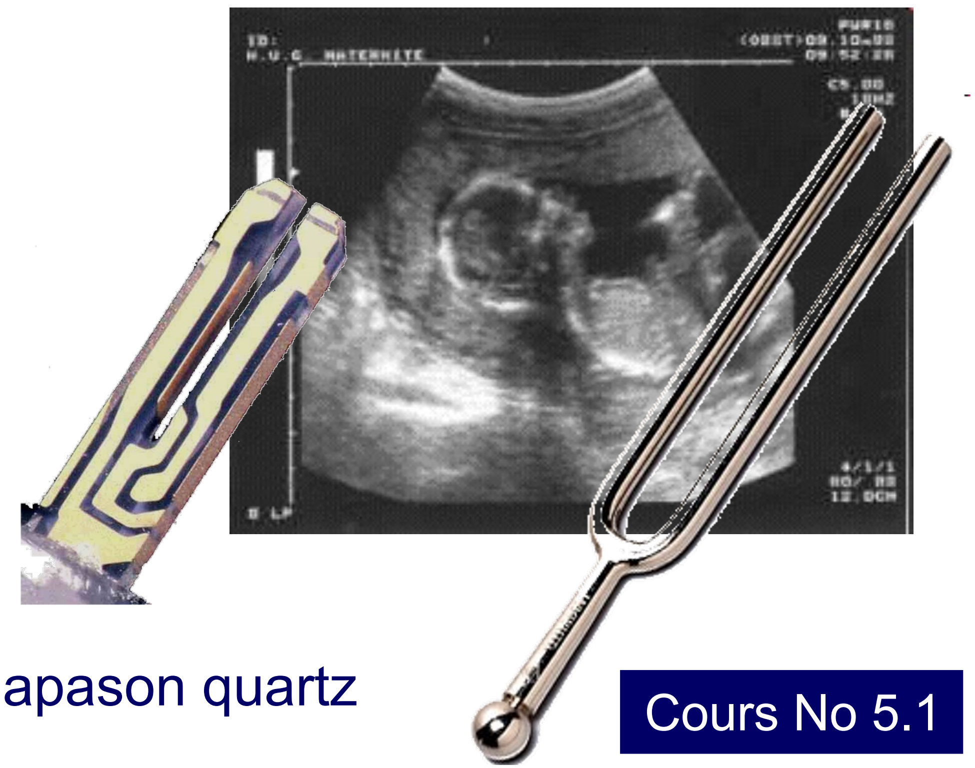


Vitesse de propagation

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Ondes **transverses** (cisaillement)





Echographie

Diapason et diapason quartz

Traction/compression uniaxiale

Quelques exemples de propriétés: 10^9 Pa

Matériaux	**E [GPa]**	**ν [-]**
Caoutchouc	0.001-0.1	~0.5
PTFE (Teflon)	0.5	0.46
Nylon	2 - 4	0.39
Chêne	11	0.3
Béton (en compression)	30	0.2
Aluminium	69	0.33
Verre	50 - 90	0.18 - 0.3
Acier	200	0.3
Saphir (Al2O3) axe c	435	0.3
Carbure de silicium (SiC)	450	0.17
Carbure de tungstène (WC)	450 - 650	0.22
Nanotubes de carbone	>1.000	~0.2
Diamant	1220	0.1

D’où viennent les propriétés élastiques des matériaux?

Rappel: Mis à part les forces de gravitation, toutes les autres forces de la vie "courante" sont de nature électrique.

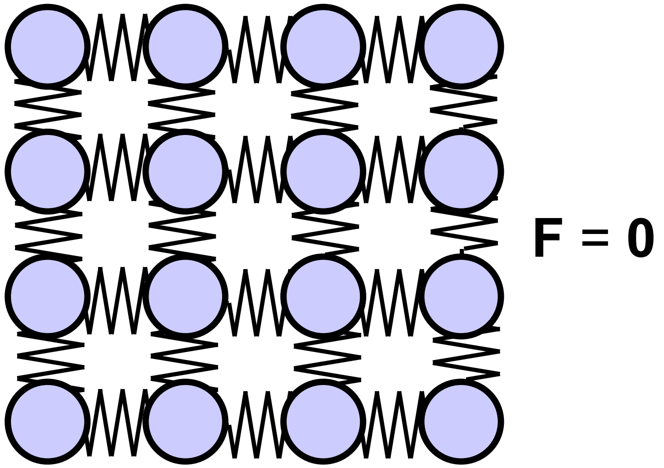
La rigidité du matériau est directement liée à la structure interne du matériau en question, et au type de liaisons.

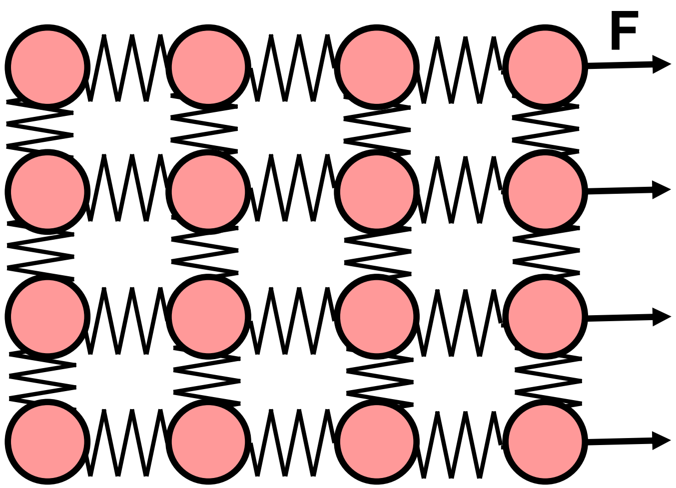
Rappel des types de liaisons dans les solides:

Type de liaison	Energie (kJ/mole)
Ionique	>40 → 600 à 1500 kJ/mol
Covalente	300-400 à 1200
Métallique	>40 → 100 à 800 kJ/mol
Faible	1-40 (400 pour H)

Propriétés élastiques des matériaux cristallins

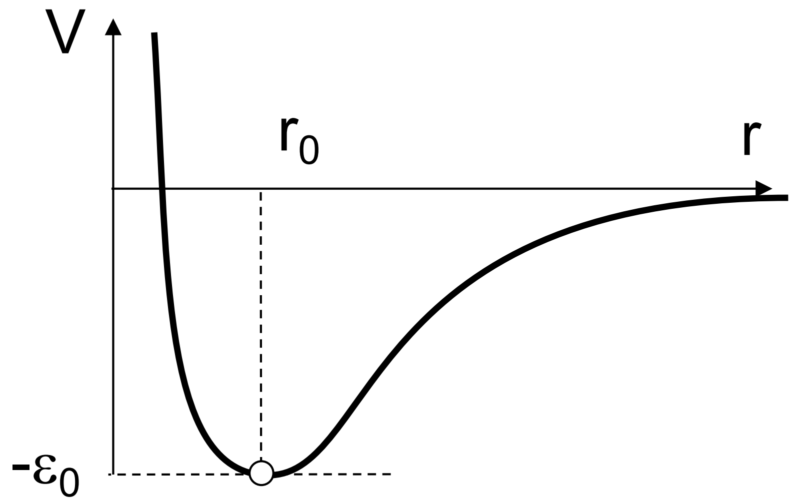
Pour un cristal, il est aisé de relier les propriétés élastiques aux liaisons interatomiques.



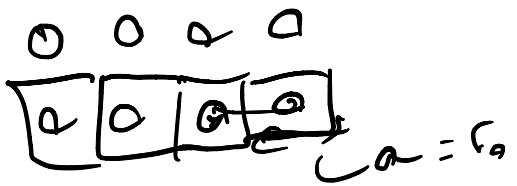


En prenant un potentiel de Lennard-Jones:

$$V = \varepsilon_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{6} \right]$$



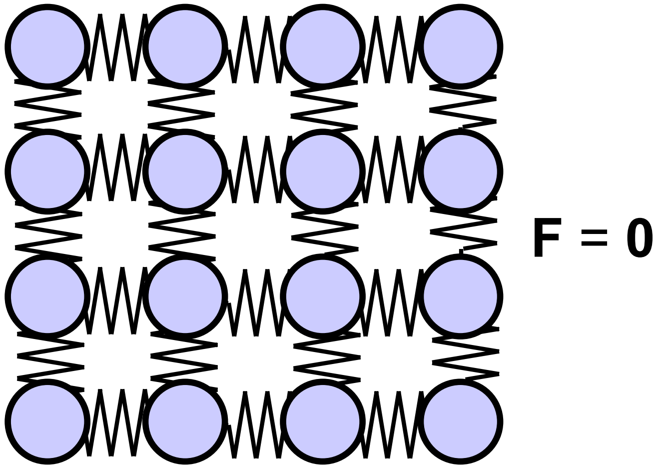
Propriétés élastiques des matériaux cristallins



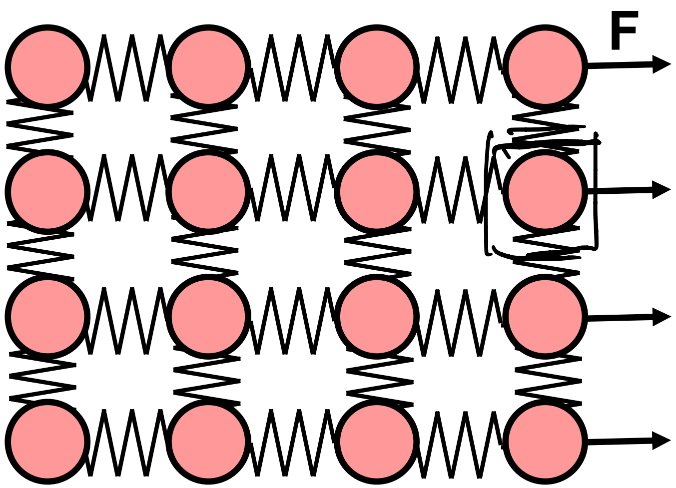
Comment estime-t-on cette raideur ou rigidité E? $E = \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}}$ ds la zone élastique

Il faut connaître le concept de contrainte et déformation, ~~présenté~~ aux slides ~~suivantes~~ précédentes:

$$\sigma_{xx} = \frac{F_x}{S_x} \quad [\mathrm{Pa} = \mathrm{Nm}^{-2}] \qquad \varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L_x}{L_{0x}}$$

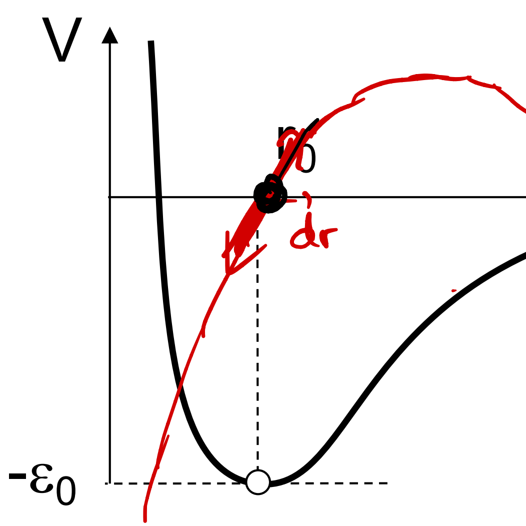


E est le rapport entre contrainte et déformation, près de la position d'équilibre r_0, en considérant que la surface d'application de la force est la surface d'une maille. On voit que plus ε_0 est grand (en valeur absolue) et plus r_0 est petit, plus cette rigidité E sera grande.



Propriétés élastiques des matériaux cristallins

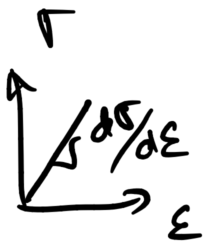
Calcul:



En prenant un potentiel de Lennard-Jones:

$$V = \varepsilon_0 \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{6} \right]$$

$$F_{ext} = -\frac{dV}{dr}$$



$$\sigma_{xx} = \frac{F_{ext}}{A} = \frac{F_{ext}}{r_0^2}$$ ✓ hyp faite $A = r_0^2$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{dr}{r_0}$$

$$E = \left.\frac{d\sigma_{xx}}{d\varepsilon_{xx}}\right|_{r_0} = \left.\frac{dF_{ext}\, r_0}{r_0^2\, dr}\right|_{r_0} = \frac{1}{r_0} \left.\frac{dF_{ext}}{dr}\right|_{r_0} = 72 \frac{\varepsilon_0}{r_0^3}$$

remplace r par r_0 ds la fonction

Résumé

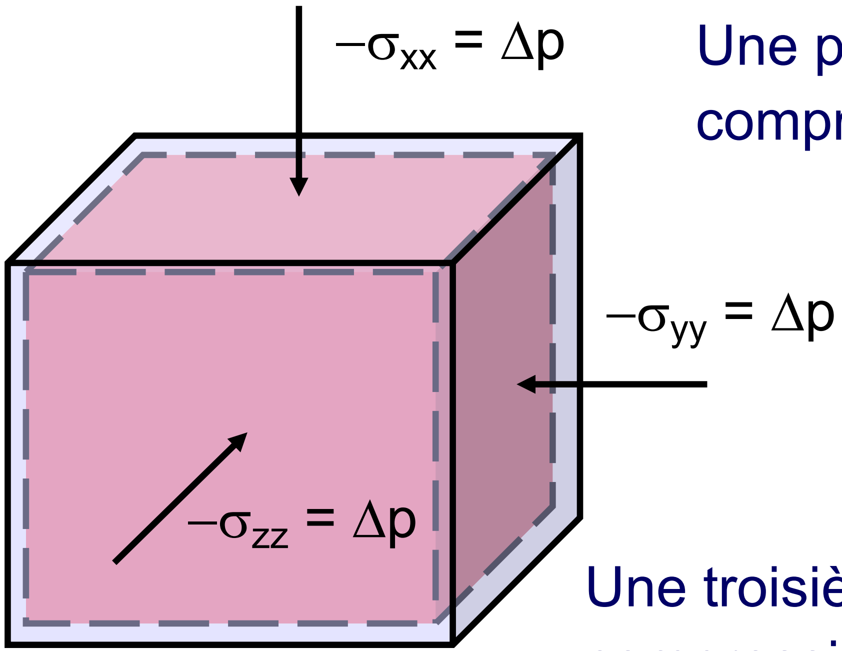
- Le module d'élasticité et le module de cisaillement d'un matériau définissent sa rigidité.
- Les déformations engendrent une variation de volume, qui dépend du module de Poisson!
- Ces propriétés dépendent essentiellement des liaisons inter-atomiques/moléculaires.
- Des tests simples quasi-statiques ou dynamiques (ondes) permettent de déterminer ces propriétés.
- Un matériau est censé être utilisé dans son domaine élastique si on veut retrouver la forme initiale lorsqu'on relâche la contrainte.

A retenir du cours d'aujourd'hui

- *Connaître les définitions de contrainte, déformation, module d'élasticité, coefficient de poisson, coefficient de compressibilité, module de cisaillement.*
- *Savoir retrouver ces éléments sur une courbe de traction*
- *Savoir retrouver le module « idéal » d'un matériau à partir du potentiel de Lennard Jones.*

Compression hydrostatique- Démonstration

On peut décomposer la pression en trois temps:



Une première compression selon x:

$$\begin{array}{lclcl} L_{0x} & \rightarrow & L_{0x}(1+\varepsilon_{xx}) & = & L_{0x}(1+\varepsilon_{xx}) \\ L_{0y} & \rightarrow & L_{0y}(1+\varepsilon_{yy}) & = & L_{0y}(1-\nu\varepsilon_{xx}) \\ L_{0z} & \rightarrow & L_{0z}(1+\varepsilon_{zz}) & = & L_{0z}(1-\nu\varepsilon_{xx}) \end{array}$$

Une seconde compression selon y:

$$\begin{array}{lcl} L_{0x}(1+\varepsilon) & \rightarrow & L_{0x}(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon) \\ L_{0y}(1-\nu\varepsilon) & \rightarrow & L_{0y}(1-\nu\varepsilon)(1+\varepsilon) \\ L_{0z}(1-\nu\varepsilon) & \rightarrow & L_{0z}(1-\nu\varepsilon)(1-\nu\varepsilon) \end{array}$$

Une troisième compression selon z:

$$\begin{array}{lcl} L_{0x}(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon) & \rightarrow & L_{0x}(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)(1-\nu\varepsilon) \\ L_{0y}(1-\nu\varepsilon)(1+\varepsilon) & \rightarrow & L_{0y}(1-\nu\varepsilon)(1+\varepsilon)(1-\nu\varepsilon) \\ L_{0z}(1-\nu\varepsilon)(1-\nu\varepsilon) & \rightarrow & L_{0z}(1-\nu\varepsilon)(1-\nu\varepsilon)(1+\varepsilon) \end{array}$$

En reportant sur les volumes:

$$\begin{array}{lcl} V_0 & = & L_{0x}L_{0y}L_{0z} \\ V & = & L_{0x}L_{0y}L_{0z}(1+(1-2\nu)\varepsilon)^3 \quad = \quad V_0(1+(1-2\nu)\varepsilon)^3 \end{array}$$

$$K = -\frac{V_0}{\Delta V}\Delta p = -\frac{V_0}{V-V_0}\Delta p = -\frac{V_0}{V_0(1+3(1-2\nu)\varepsilon-1)}\Delta p = \frac{-\Delta p}{3(1-2\nu)\varepsilon}$$

soit $\quad K = \frac{1}{3(1-2\nu)}\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$